

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ЦИКЛЫ ПРОЕКТИРОВАНИЯ НА НАИБОЛЕЕ УДАЛЕННУЮ СТОРОНУ ТРЕУГОЛЬНИКА

Трофимов С.П.¹, Селиванова И.А.²

¹ Уральский институт экономики, управления и права,
ул. Луначарского, 194, Екатеринбург, Свердловская обл., 620026, Россия
e-mail: tsp61@mail.ru

² Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина
ул. Мира, 19, Екатеринбург, Свердловская обл., 620002, Россия
тел.: (343) 375-97-59, e-mail: aitsia@mail.ru

Аннотация — Рассмотрена задача нахождения предельных многоугольных циклов при ортогональном проектировании на наиболее удаленное множество из конечного набора выпуклых компактных множеств на плоскости. В качестве простейшего случая построены предельные циклы проектирования на наиболее удаленную сторону треугольника. Предложены критерий существования и аналитические формулы для предельных треугольных циклов. Описано множество начальных точек последовательности, сходящейся к треугольному циклу. Представлены примеры многоугольных циклических контуров. Проведены численные расчеты для треугольников.

Предложено обобщение алгоритма для построения предельных многоугольных циклов при проектировании на наиболее удаленный выпуклый компакт. Алгоритм использует функции расстояния до выпуклого множества и эквидистантные линии между множествами. Эти линии обобщают понятие биссектрисы для двух сторон треугольника.

Кл. слова: предельный цикл; циклическое ортогональное проектирование; предельный треугольник; максимальное удаленное множество; сжимающее отображение; итерационная последовательность.

LIMIT CYCLES OF ORTHOGONAL PROJECTION ONTO THE SET OF THE MOST REMOTE

Trofimov S.P.¹, Selivanova I.A.²,

¹ Ural Institute of Economics, Management and Law,
Lunacharskogo St, 194, Yekaterinburg, Sverdlovsk region, 620026, Russian Federation
e-mail: tsp61@mail.ru

² Ural Federal University named after the first President of Russia B.N. Yeltsin
Mira St, 19, Yekaterinburg, Sverdlovsk region, 620002, Russian Federation
ph.: (343) 375-97-59, e-mail: aitsia@mail.ru

Abstract — The problem of finding the limit polygonal cycles of orthogonal projection onto the most remote set in the plane is discussed. As a simplest case we have considered projections onto the remote side of the triangle. A criterion of existence and analytical formulas for limit triangular cycles is described. We construct the set of initial points of the sequence converging to the triangular cycle. The examples of limit polygonal cycles are presented. Numerical calculations are performed.

The algorithm for triangle is generalized for projections onto the remote convex set. This generalization uses a distance functions to a convex set and equidistant lines between sets. These lines summarize the concept of the bisectors between two sides of a triangle.

Key words: limit cycle; orthogonal projection; limit polygon; remote distanced set; contraction mapping; iterative sequence

I. Постановка задачи

В рамках Всероссийской научно-практической конференции «Вл.Д. Мазуров и Уральская научная школа распознавания образов», посвященной 75-летию юбилею основателя школы проф. Вл. Д. Мазурова, был проведен открытый межвузовский конкурс среди студентов, преподавателей и всех желающих по решению именной задачи, представленной профессором Владимиром Даниловичем Мазуровым.

Традиция решения именной задачи, предложенной известным и авторитетным ученым, восходит к турниру академика Н.Н.Красовского, который регулярно проводился для студентов радиотехнического факультета УрФУ в конце 1990-х годов.

На плоскости задан треугольник ABC . Пусть $\varphi(x)$ – ортогональная проекция точки x треугольника или его внутренности на наиболее удаленную сторону треугольника ABC . Если таких сторон оказывается 2 или 3, то выбор осуществляется произвольным образом или по усмотрению.

Построим итерационную последовательность

$$x^{n+1} = \varphi(x^n), n = 1, 2, \dots,$$

где x^1 – некоторая начальная точка треугольника.

Необходимо предложить алгоритм, если он существует, для решения следующих задач.

1. Найти все начальные точки x^1 , для которых последовательность $\{x^n\}$ переходит в постоянный цикл, состоящий из трех или более последовательных точек.
2. Найти все начальные точки x^1 , для которых последовательность $\{x^n\}$ асимптотически стремится к предельному циклу.

II. Основные проблемы и решения

Рассмотрим остроугольный треугольник ABC . Биссектрисы разбивают треугольник на 6 зон (рис.1).

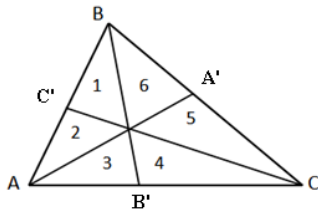
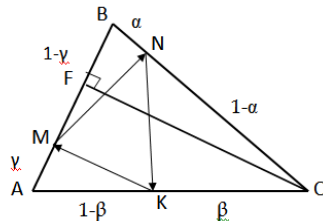
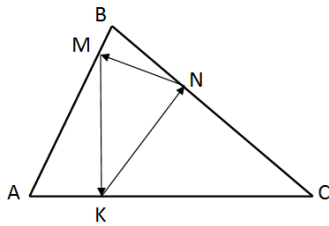


Рис.1. Разбиение треугольника на зоны с помощью биссектрис

Элементы итерационной последовательности последовательно переходят между этими зонами. Допустим, треугольник MNK является предельным треугольным циклом при ортогональном проектировании на наиболее удаленную сторону треугольника (рис.2).



а)



б)

Рис.2. Треугольные циклы: а) по часовой стрелке, б) против часовой стрелки.

Обозначим через $\alpha/(1-\alpha)$, $0 \leq \alpha \leq 1$, пропорцию, в которой точка N делит отрезок BC . Обозначим аналогичным образом пропорции для других сторон треугольника (рис. 2 а)).

Получаем следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \text{а)} \quad KC &= NC \cdot \cos C \\ \beta \cdot AC &= BC \cdot (1-\alpha) \cdot \cos C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{б)} \quad AM &= AK \cdot \cos A \\ \gamma \cdot AB &= AC \cdot (1-\beta) \cdot \cos A \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{в)} \quad BN &= MB \cdot \cos B \\ \alpha \cdot BC &= AB \cdot (1-\gamma) \cdot \cos B \end{aligned}$$

Отсюда получаем систему уравнений относительно трех неизвестных α , β и γ .

$$\begin{cases} \alpha \cdot BC \cdot \cos C + \beta \cdot AC &= BC \cdot \cos C \\ \beta \cdot AC \cdot \cos A + \gamma \cdot AB &= AC \cdot \cos A \\ \alpha \cdot BC &+ \gamma \cdot AB \cdot \cos B = AB \cdot \cos B \end{cases} \quad (1)$$

Введем обозначения:

$$P = AC \cdot BC \cdot AB, \quad (2)$$

$$r = \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C. \quad (3)$$

Найдем решение системы (1) методом Крамера. Для этого вычислим соответствующие определители 3 порядка:

$$\Delta = \begin{vmatrix} BC \cdot \cos C & AC & 0 \\ 0 & AC \cdot \cos A & AB \\ BC & 0 & AB \cdot \cos B \end{vmatrix} =$$

$$= r \cdot P + P = P \cdot (r+1)$$

$$\Delta_\alpha = \begin{vmatrix} BC \cdot \cos C & AC & 0 \\ AC \cdot \cos A & AC \cdot \cos A & AB \\ AB \cdot \cos B & 0 & AB \cdot \cos B \end{vmatrix} =$$

$$= P \cdot r + AB^2 \cdot AC \cdot \cos B - AC^2 \cdot AB \cdot \cos A \cdot \cos B$$

$$\Delta_\beta = \begin{vmatrix} BC \cdot \cos C & BC \cdot \cos C & 0 \\ 0 & AC \cdot \cos A & AB \\ BC & AB \cdot \cos B & AB \cdot \cos B \end{vmatrix} =$$

$$= P \cdot r + AB \cdot BC^2 \cdot \cos C - AB^2 \cdot BC \cdot \cos B \cdot \cos C$$

$$\Delta_\gamma = \begin{vmatrix} BC \cdot \cos C & AC & BC \cdot \cos C \\ 0 & AC \cdot \cos A & AC \cdot \cos A \\ BC & 0 & AB \cdot \cos B \end{vmatrix} =$$

$$= P \cdot r + AC^2 \cdot BC \cdot \cos A - AC \cdot BC^2 \cdot \cos A \cdot \cos B$$

Так как $\Delta \neq 0$, то решение системы (1) существует, единственно и равно

$$\alpha = \frac{\Delta_\alpha}{\Delta}, \quad (4)$$

$$\beta = \frac{\Delta_\beta}{\Delta}, \quad (5)$$

$$\gamma = \frac{\Delta_\gamma}{\Delta}. \quad (6)$$

Преобразуем выражения для Δ_α и α :

$$\begin{aligned} \Delta_\alpha &= P \cdot r + P \cdot \left(\frac{AB}{BC} \cdot \cos B - \frac{AC}{BC} \cos A \cdot \cos B \right) = \\ &= P \cdot r + P \cdot \left(\frac{AB}{BC} \cdot \cos B - \frac{AF}{BC} \cdot \cos B \right) = \\ &= P \cdot r + P \cdot \left(\frac{FB}{BC} \cdot \cos B \right) = P \cdot r + P \cdot \cos^2 B, \end{aligned}$$

где F - основание высоты, опущенной из C на сторону AB (рис.2а).

Тогда

$$\alpha = \frac{\Delta_\alpha}{\Delta} = \frac{P \cdot r + P \cdot \cos^2 B}{P \cdot (r+1)},$$

откуда

$$\alpha = \frac{r + \cos^2 B}{r + 1} \quad (7)$$

Исходя из соображений симметрии, аналогичным образом получим

$$\beta = \frac{r + \cos^2 C}{r + 1}, \quad (8)$$

$$\gamma = \frac{r + \cos^2 A}{r + 1}. \quad (9)$$

Таким образом, доказана

Теорема 1. Если предельный треугольный цикл MNK при проектировании по часовой стрелке существует, то этот цикл единственный и определяется с помощью коэффициентов пропорций (7), (8), (9), где $r = \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C$.

Аналогично получаем теорему о параметрах предельного цикла против часовой стрелки.

Теорема 2. Если предельный треугольный цикл MNK при проектировании против часовой стрелки существует, то этот цикл единственный и определяется с помощью коэффициентов пропорций (10), (11), (12).

$$\alpha = \frac{r + \cos^2 C}{r + 1} \quad (10)$$

$$\beta = \frac{r + \cos^2 A}{r + 1} \quad (11)$$

$$\gamma = \frac{r + \cos^2 B}{r + 1} \quad (12)$$

Найдем условия существования предельного треугольного цикла при проектировании на наиболее удаленную сторону с движением по часовой стрелке.

Проведем в $\triangle ABC$ биссектрису из угла A . Биссектриса разделит сторону BC на отрезки a_1 и a_2 (рис.3).

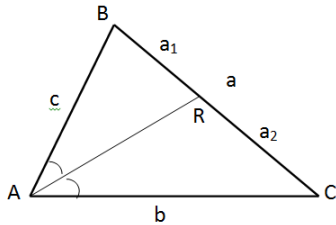


Рис. 3. Биссектриса делит противоположную сторону в известной пропорции

По известному свойству биссектрисы [5, стр.327], получаем

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{c}{b}. \quad (13)$$

По теореме синусов [5, стр.432] имеем

$$\frac{c}{b} = \frac{\sin C}{\sin B}. \quad (14)$$

Используя соотношения (13) и (14), получаем

$$\frac{a_1}{a} = \frac{a_1}{a_1 + a_2} = \frac{1}{1 + \frac{a_2}{a_1}} = \frac{1}{1 + \frac{\sin B}{\sin C}} = \frac{\sin C}{\sin B + \sin C}.$$

Если треугольный цикл по часовой стрелке существует, то точка N , соответствующая числу α , должна лежать в зоне №6 (рис. 1), то есть в отрезке BR . Это возможно, если

$$\alpha < \frac{\sin C}{\sin B + \sin C}.$$

Для проекций на другие стороны треугольника получаем аналогичные соотношения. С учетом теоремы 1 получаем

Теорема 3. Предельный треугольный цикл по часовой стрелке существует тогда и только тогда, когда

а) точка N лежит в зоне №6, т.е.

$$\alpha = \frac{r + \cos^2 B}{r + 1} < \frac{\sin C}{\sin B + \sin C} = \alpha_0, \quad (15)$$

б) точка K лежит в зоне №4, т.е.

$$\beta = \frac{r + \cos^2 C}{r + 1} < \frac{\sin A}{\sin A + \sin C} = \beta_0, \quad (16)$$

в) точка M лежит в зоне №2, т.е.

$$\gamma = \frac{r + \cos^2 A}{r + 1} < \frac{\sin B}{\sin A + \sin B} = \gamma_0. \quad (17)$$

Для предельного цикла против часовой стрелки получаем аналогичное утверждение.

Теорема 4. Предельный цикл против часовой стрелки существует тогда и только тогда, когда

а) точка N лежит в зоне №5, т.е.

$$\frac{r + \cos^2 C}{r + 1} < \frac{\sin B}{\sin B + \sin C}, \quad (18)$$

б) точка M лежит в зоне №1, т.е.

$$\frac{r + \cos^2 A}{r + 1} < \frac{\sin C}{\sin C + \sin A}, \quad (19)$$

в) точка K лежит в зоне №3, т.е.

$$\frac{r + \cos^2 B}{r + 1} < \frac{\sin A}{\sin A + \sin B}. \quad (20)$$

Обозначим правые части соотношений (15)-(17) через α_0 , β_0 , и γ_0 . Известно, что ортогональная проекция на прямую является сжимающим отображением, то есть длина отрезка при такой проекции уменьшается. Коэффициент сжатия равен косинусу угла между отрезком и прямой.

Найдем множество стартовых точек x^1 последовательности $\{x^n\}$, лежащих на контуре треугольника ABC и при которых $\{x^n\}$ сходится к треугольному циклу.

Числа α , β , γ , α_0 , β_0 , и γ_0 , используемые в теореме 3, являются долями единицы. С их помощью можно определить длины отрезков. Например, для опоры R биссектрисы AR на рис. 3 получаем $BR = \alpha_0 \cdot BC$. Расстояние между вершиной N треугольного цикла MNK и опоры R равно $(\alpha_0 - \alpha) \cdot BC$, где $\alpha \leq \alpha_0$. Обозначим через

$$d = \min\{(\alpha_0 - \alpha) \cdot BC; (\beta_0 - \beta) \cdot AC; (\gamma_0 - \gamma) \cdot AB\}$$

минимальное расстояние от вершин треугольника MNK до соответствующих опор биссектрис треугольника ABC . Возьмем первые три точки x^1 , x^2 , x^3 итерационной последовательности $\{x^n\}$. Если эти точки одновременно находятся от соответствующих оснований биссектрис на расстоянии меньшем, чем d , то по свойству сжимающего отображения

следующие точки будут обладать тем же свойством, причем это расстояние будет уменьшаться с линейной скоростью. Так как треугольный цикл MNK при проекциях сохраняется, то расстояние между последовательностью $\{x^n\}$ и соответствующими вершинами MNK стремится к нулю. Таким образом, доказана

Теорема 5. Допустим, выполняются условия теоремы 3, то есть

$$\alpha < \alpha_0, \beta < \beta_0, \text{ и } \gamma < \gamma_0.$$

Допустим, начальная точка x^1 находится на некоторой стороне треугольника ABC . Обозначим $\rho(x^1)$ расстояние от x^1 до вершины циклического треугольника MNK , лежащей на той же стороне треугольника ABC . Допустим $\rho(x^1) < d$. Тогда последовательность $\{x^n\}$ будет сходиться к соответствующим вершинам треугольника MNK , то есть $\rho(x^n) \rightarrow 0$. На каждой итерации расстояние $\rho(x^n)$ будет уменьшаться не менее, чем в t раз, где

$$t = \max\{\cos A, \cos B, \cos C\}.$$

Следствие. Любая последовательность, сходящаяся к треугольному циклу MNK , с некоторого номера n будет удовлетворять условию теоремы 5. При этом элементы $\{x^n\}$ последовательно проходят зоны 6,4,2 (рис.1).

Возьмем на стороне BC интервал I_1 с центром в точке N и с длиной $2 \cdot d$ (рис.1а). В этот интервал обязательно попадет последовательность, сходящаяся к вершинам треугольника MNK . Осуществим обратное отображение и найдем на стороне AB интервал I'_2 , который ортогонально проектируется на I_1 . Найдем пересечение I'_2 с зоной 2, то есть $I_2 = I'_2 \cap [AC]$. Точки отрезка I_2 также могут являться начальными точками циклической последовательности. Осуществим эту операцию до тех пор, пока очередное множество I_m не станет пустым множеством, либо бесконечное число раз. Объединение всех отрезков I_m , $m=1,2,\dots$ дает множество начальных точек последовательностей $\{x^n\}$, сходящихся к треугольному циклу.

Численные расчеты существования предельных треугольных циклов

Треугольные циклы существуют не для любого остроугольного треугольника. Критерием существования такого цикла по часовой стрелке является теорема 3. Соотношения (15)-(17) образуют систему нелинейных тригонометрических неравенств относительно неизвестных углов A , B и C , связанных равенством $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$. Численные расчеты показали, что векторы, составленные из углов A и C , удовлетворяющих системе (15)-(17), образуют невыпуклую связную фигуру на рис 4.

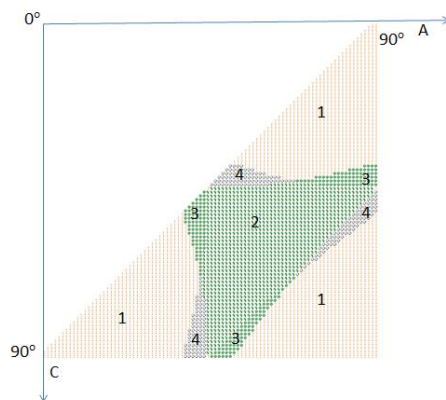
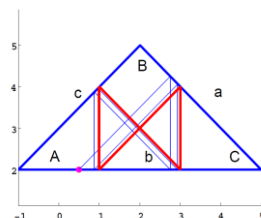


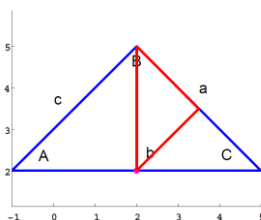
Рис 4. Множество углов (A, C) остроугольного треугольника ABC , для которого существуют треугольные циклы: 1-нет циклов; 2-есть оба цикла; 3- есть только цикл против часовой стрелки; 4- есть только цикл по часовой стрелке.

Многоугольные предельные циклы

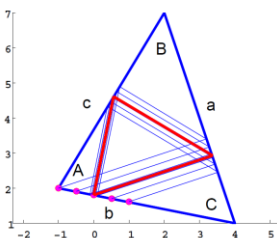
Для остроугольного треугольника ABC треугольные циклы могут отсутствовать. Однако могут существовать предельные циклы в виде невыпуклых многоугольных контуров с самопересечениями.



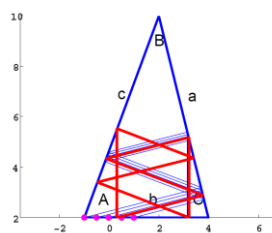
а)



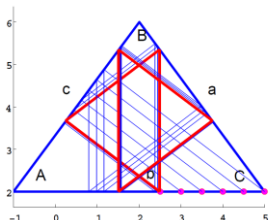
б)



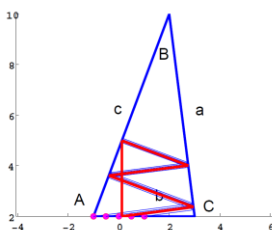
в)



г)



д)



е)

Рис. 5. Предельные многоугольные циклические контуры: а) циклическая бабочка, б) циклическая бабочка в прямоугольном треугольнике, в) треугольный цикл против часовой стрелки, г) пила с тремя зубцами влево, д) два треугольных контура в одном треугольнике, е) флажок.

Рассмотрим второй пункт задачи Мазурова. Построим множество стартовых точек, для которых $\{x^n\}$ стремится к некоторому многоугольному предельному циклу. В соответствии с рис.4 возможны три варианта существования треугольного предельного цикла.

1. Нет треугольных циклов.

Возьмем треугольник ABC с углами $A=70^\circ$, $B=40^\circ$, $C=70^\circ$. В данном треугольнике сторона AC равна 4 и для любой стартовой точки на стороне AC мы получаем восьмиугольный цикл (рис.6).

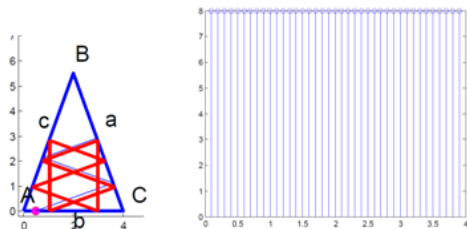


Рис. 6. Треугольник, имеющий только восьмиугольные предельные циклы

2. Один треугольный цикл.

Возьмем треугольник ABC с углами $A=87^\circ$, $B=41^\circ$, $C=42^\circ$. В данном случае для любой стартовой точки на стороне AC мы получаем единственный треугольный цикл против часовой стрелки, но

переходный процесс включает в себя разные направления (рис.7).

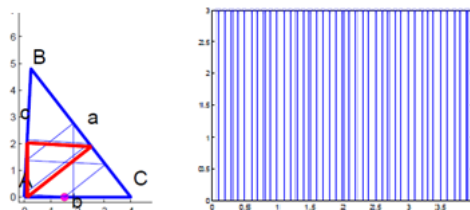


Рис. 7. Треугольник, имеющий только треугольные предельные циклы по и против часовой стрелки

3. Два треугольных и один четырехугольный циклы.

Возьмем треугольник ABC с углами $A=50^\circ$, $B=50^\circ$, $C=80^\circ$ (рис.8).

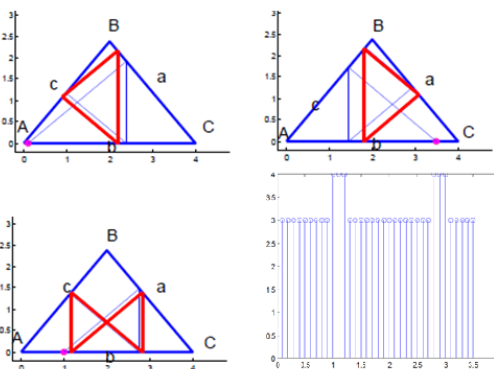


Рис. 8. Треугольник, имеющий треугольные и четырехугольные предельные циклы по и против часовой стрелки

Вид предельного цикла зависит от выбора стартовой точки x_0 на отрезке AC с длиной 4.

1. интервал $[0; 1)$ - треугольный цикл по часовой стрелке,
2. интервал $[1; 1,2]$ - четырехугольный цикл по часовой стрелке
3. интервал $(1,2; 2)$ - треугольный цикл против часовой стрелки,
4. интервал $(2; 2,8)$ -треугольный цикл по часовой стрелке
5. интервал $[2,8; 3]$ - четырехугольный цикл против часовой стрелки
6. интервал $(3; 4]$ - треугольный цикл против часовой стрелки.

III. Заключение

В статье представлены аналитические формулы, позволяющие определить, существует ли для заданного остроугольного треугольника предельный треугольный цикл при ортогональном проектировании на наиболее удаленную сторону треугольника. Движение по вершинам треугольных циклов происходит по часовой или против часовой стрелки. В случае существования предельного цикла, предложен численный способ построения множества начальных точек итерационной последовательности, сходящейся к предельному циклу. Это множество располагается на сторонах треугольника и может быть несвязным. Представляет интерес структура множества начальных точек.

IV. Литература

- [1] Stiles W.J. Closest-point maps and their products // Nieuw Archief voor Wiskunde. 1965. v. 13. № 3. P.212—228.
- [2] Турин Л.Г., Поляк Б.Т., Райк Э.В. Методы проекции для отыскания общей точки выпуклых множеств // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1967. т. 7. № 6. С. 1211 — 1228.
- [3] Еремин И.И., Мазуров Вл.Д. Итерационный метод решения задачи выпуклого программирования // Доклады АН СССР. 1966. т. 170. № 1. С. 57 - 60 .
- [4] Мазуров Вл.Д. Релаксационный метод в условиях противоречивой системы линейных неравенств (множество предельных точек) // Математические заметки. 1969. Том 5. Выпуск 4. С.449-456.
- [5] Мазуров Вл.Д. Релаксационный метод в условиях противоречивой системы линейных неравенств (множество предельных точек) // Математические заметки. 1969. Том 5. Выпуск 4. С.449-456.